

TD Séries numériques

Comparaisons

HGZ Exercice 1 🦋 Déterminer la nature de la série, en fonction du paramètre.

1. $\sum n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\sum \frac{\lambda^n}{1+\lambda^n}, \lambda > 0$
3. ★ $\sum \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1 \right)^a$

K7S Exercice 2 🏠 Natures des séries de terme général

1. $\sqrt{\cosh \frac{1}{n} - 1}$
2. $\sin \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n}$
3. $\cos \left(\frac{\pi n}{2(n+1)} \right)$
4. ★ $\arccos \left(\frac{n}{n+1} \right)$

WXP Exercice 3 🦋 Déterminer la nature des séries de terme général

1. $\sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$
2. $\sqrt{n^2 + 1} - n$
3. $\frac{\ln n}{n^2}$
4. $\frac{n}{2^n}$
5. $\frac{1}{(\ln n)^2}$
6. $e^{-\sqrt{n}}$
7. $\ln \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$
8. $\frac{\cosh n}{\cosh 2n}$

SMB Exercice 4 Nature de

1. $\sum \left(\cos \frac{1}{n} \right)^n$
2. $\sum n^{1/n} - n^{1/(n+1)}$
3. $\sum \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$
4. $\sum \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)^{n^\alpha}$

4BH Exercice 5 🦋 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $c(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n .

1. Donner un encadrement de $c(n)$ en termes de $\log_{10}(n)$.
2. Quelle est la nature de $\sum \frac{c(n)}{n^\alpha}$, en fonction de $\alpha > 0$.

BM6 Exercice 6 🦋 Donner une CNS sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que la série de terme général $a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n-1}$ converge. Dans ce cas, quelle est sa somme ?

Sommes

0HL Exercice 7 Justifier la convergence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$.

JD8 Exercice 8 🦋 Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum \frac{x^n}{n}$ converge. Quelle est sa somme ?

Q9V Exercice 9 On considère la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Justifier la convergence de $\sum \frac{F_n}{3^n}$.
2. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{3^n}$.

YL4 Exercice 10 Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

1. Justifier la définition de f .
2. Montrer que la fonction f est concave.
3. En déduire que f est continue.
4. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

4YY Exercice 11 ★ 1. Trouver les fonctions $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} f(x^n)$.

2. Trouver les fonctions $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} f(x^n)$.

PQ0 Exercice 12 DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE D'UNE FONCTION ABSOLUMENT MONOTONE

Soit $f: [0, b[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \geq 0$. On note $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $S_n: x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$.

1. Montrer que $\forall x \in]0, b[, S_n(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du$. En déduire que S_n est croissante sur $]0, b[$.
2. ★ Soit $x \in [0, b[$. En considérant $c \in]x, b[$, montrer que $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que f est DSE en 0, c'est-à-dire $\forall x \in [0, b[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

5B1 Exercice 13 ★ Montrer que tout réel $x \in [0, 1[$ peut s'écrire de manière unique $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}$, avec une suite (a_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [0, n-1]$ et $\forall n_0, \exists n \geq n_0, a_n \neq n-1$.

Liens suite/série

CDP Exercice 14 🦋 On considère une suite définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$. On rappelle que $u_n \rightarrow 0$.

1. À l'aide de $\sum (u_{n+1} - u_n)$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.
2. À l'aide de $\ln(u_{n+1}) - \ln u_n$, montrer que $\sum u_n^2$ diverge.

R9U Exercice 15 DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SÉRIE HARMONIQUE ET APPLICATIONS.

1. On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer qu'il existe une constante γ telle que $H_n = \ln n + \gamma + o_{+\infty}(1)$.
2. Justifier la convergence de la suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. En exprimant S_n en fonction de H_{2n} et H_n . Déterminer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

D88 Exercice 16 ♣ ★ Soit (u_n) strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.

STPs

QK9 Exercice 17 🦋 Soit (u_n) une suite réelle. On suppose u_n positive. Montrer que la série $\sum u_n$ a la même nature que $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$.

ITF Exercice 18 Soit $\sum a_n$ une série positive convergente.

1. Montrer que $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. Réciproque ?
2. Montrer que pour $\alpha > \frac{1}{2}$, $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ converge.

402 Exercice 19 🦋 Soit (u_n) une suite décroissante positive dont la série converge. On note (S_n) la suite des sommes partielles.

1. Déterminer la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, de $S_{2n} - S_n$.
2. En déduire que $u_{2n} = o(\frac{1}{n})$, puis que $u_n = o(\frac{1}{n})$.

VH7 Exercice 20 Discuter, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, de la nature de $\sum \frac{|\sqrt{n+1}| - |\sqrt{n}|}{n^\alpha}$.

JCN Exercice 21 Déterminer la nature des séries suivantes :

- $\sum \binom{2n}{n}^{-1}$
- $\sum \frac{4^n}{n} \binom{2n}{n}^{-1}$

RF0 Exercice 22 Soit (a_n) une suite de réels positives et (c_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $u_n = (a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$ et $b_n = (c_1 \dots c_n)^{-\frac{1}{n}}$. On suppose que $\sum a_n$ converge.

- Montrer que $u_n \leq \frac{b_n}{n} \sum_{k=1}^n a_k c_k$
- On suppose que $\sum \frac{b_n}{n}$ converge et on pose $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{k}$. Montrer que $\sum_{p=1}^n u_p \leq \sum_{k=1}^n B_k a_k c_k$.
- On prend $c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

00W Exercice 23 Soit (a_n) une suite réelle positive.

On suppose que $\sum a_n$ diverge, et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

- Montrer que $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge.
- En déduire que la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.
- Montrer que $\sum \frac{a_n}{S_n^{1+\delta}}$ converge pour tout $\delta > 0$.

Indication : Adapter une démonstration de la divergence de $\sum \frac{1}{n}$.

Indication : Considérer les intégrales $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^{1+\delta}} dt$.

UV9 Exercice 24 Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$.

- Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sigma(n)}$?
- Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$?

Le chapitre sur les familles sommables trivialisera ces deux questions : pour des STPs, l'ordre de sommation n'a pas d'importance.

- Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

Comparaisons intégrales

8ZY Exercice 25 [BANQUE CCP MP] SÉRIES DE BERTRAND On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Déterminer la nature de $\sum u_n$ dans le cas $\alpha \leq 0$.
- En utilisant la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$, déterminer la nature de $\sum u_n$ dans le cas $\alpha > 0$.

4JY Exercice 26

- Équivalent, quand $n \rightarrow +\infty$, de $S_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{k}$.
- Équivalent, quand $n \rightarrow +\infty$, de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

4C8 Exercice 27 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

- Montrer que $\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \sup_{[n, n+1]} |f'|$.
- Montrer que $\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |f'|$.
- On pose $e_n = \sup_{[n, n+1]} |f'|$, montrer que si $\sum e_n$ converge, la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_0^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même nature.
- Nature de $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ et $\sum \frac{\sin \ln n}{n}$.

IT1 Exercice 28 ÉQUIVALENT DE LA FONCTION ZETA Déterminer un équivalent simple, quand $s \rightarrow 1^+$, de $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

À termes quelconques

LWE Exercice 29 Nature de

- $\sum \sin(n\pi + \frac{1}{n})$
- $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$
- $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$
- $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$

RV7 Exercice 30 Discuter, en fonction de $\alpha, \beta > 0$, de la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha(1-n^\beta)}$

UJY Exercice 31 Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_n \rightarrow 0$.

- Montrer que la nature de $\sum u_n$ est la même que celle de $\sum u_{2n} + u_{2n+1}$.
- Nature de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$.

KJY Exercice 32 Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- Justifier soigneusement la définition de f .
- Déterminer la limite de $f(x)$, quand $x \rightarrow +\infty$.
- Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+x)(2n+x+1)}$.
- En déduire un équivalent de $f(x)$, quand $x \rightarrow +\infty$.

69U Exercice 33 Nature de $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

KY5 Exercice 34 Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose qu'il existe $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |\arg z_n| \leq \alpha$. Montrer que $\sum z_n$ et $\sum |z_n|$ ont la même nature.

L8I Exercice 35 Soit $\alpha > 0$ et $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

5P0 Exercice 36 [ORAL X] Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente.

- Montrer que $\sum |x_n|^p$ converge pour tout réel $p \geq 1$
- Limite, quand $p \rightarrow +\infty$, de $(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^p|)^{1/p}$.

Indication : Il faut déjà savoir traiter le cas d'une somme finie : quelle est la limite, quand $p \rightarrow +\infty$, de $(\sum_{k=1}^m x_k^p)^{1/p}$?